
LE THÉORÈME DE DÉRIVATION DE LEBESGUE

Dans ces notes, on fixe $n \geq 1$ un entier et on travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$. Dans l'ensemble de ce texte, une boule (fermée, non dégénérée), est un ensemble de la forme :

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\},$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ sont donnés ; on appelle x le *centre* de B et r son *rayon*. Étant donné une boule B , on note $r(B)$ son rayon.

Si $B = B[x, r]$ est une boule (avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$), on note $\hat{B} := B[x, 5r]$ la boule de même centre que B et de rayon égal au quintuple de celui de B .

Dans ce texte, on substituera le symbole $\sqcup$ au symbole $\cup$ lorsque les parties dont on forme la réunion sont deux à deux disjointes.

Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est donné, on note $|E|$ sa mesure extérieure de Lebesgue (rappelons au passage que la restriction aux ensembles Lebesgue-mesurables, de la mesure extérieure de Lebesgue, est une mesure appelée la *mesure de Lebesgue*) ; rappelons que la mesure extérieure de Lebesgue est invariante par translations et que l'on a, pour $\lambda \geq 0$ un réel et $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $|\lambda E| = \lambda^n |E|$. En particulier, il vient $|B[x, \lambda r]| = \lambda^n |B[x, r]|$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $\lambda > 0$; en notant $\omega_n := |B[0, 1]|$ la mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on en déduit en particulier que l'on a $|B[x, r]| = |B[0, r]| = r^n \omega_n$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

Étant donné une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on notera parfois :

$$\oint_{B[x, r]} f := \frac{1}{|B[x, r]|} \int_{B[x, r]} f,$$

la *moyenne* de f sur $B[x, r]$ (l'intégration se faisant ici, et dans l'ensemble de ce texte, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$).

Au cours du **9 ou du 16 octobre 2023**, nous démontrerons formellement le théorème de recouvrement de Vitali.

Théorème 1 (Vitali). — Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules (fermées, non dégénérées) vérifiant :

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} r(B) < +\infty.$$

Dans ces conditions, il existe une famille au plus dénombrable $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ constituée de boules deux à deux disjointes et telle que l'on ait :

$$\cup \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \hat{B}.$$

1. La fonction maximale de Hardy-Littlewood

Étant donné une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on note Mf sa *fonction maximale de Hardy-Littlewood* définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \int_{B[x,r]} |f|.$$

Cette fonction n'est, en général, pas intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si f l'est ; elle vérifie néanmoins une propriété intéressante, appelée *inégalité faible* (1, 1).

Lemme 1. — *Étant donné une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel positif $\lambda > 0$, on a :*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|. \quad (1)$$

Démonstration. — Soient f et $\lambda > 0$ comme dans l'énoncé. Commençons par observer que si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ sont donnés, on a :

$$\int_{B[x,r]} |f| = \frac{1}{|B[x,r]|} \int_{B[x,r]} |f| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Or il est clair que l'on a $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f| = 0$; il s'ensuit qu'il existe un réel positif $R > 0$ tel que, pour tout $r \geq R$, on ait $\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \leq \lambda$ et donc aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r \geq R$:

$$\int_{B[x,r]} |f| \leq \lambda. \quad (2)$$

Posons à présent $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Pour chaque $x \in E$, il existe, par définition de $Mf(x)$, un réel $r_x > 0$ tel que l'on ait :

$$\frac{1}{|B[x, r_x]|} \int_{B[x, r_x]} |f| = \int_{B[x, r_x]} |f| > \lambda.$$

Il résulte par ailleurs de (2) que, pour chaque $x \in E$, on a $r_x \leq R$. Si on pose :

$$\mathcal{B} := \{B[x, r_x] : x \in E\},$$

on voit donc que $\mathcal{B}$ est une famille de boules (fermées, non dégénérées) vérifiant :

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} r(B) = \sup_{x \in E} r_x \leq R < +\infty ;$$

pour chaque $B \in \mathcal{B}$, on a en outre par définition de $\mathcal{B}$:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f| = \int_B |f| > \lambda. \quad (3)$$

Le théorème de recouvrement de Vitali (Théorème 1 ci-dessus) assure l'existence d'une famille au plus dénombrable $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ telle que l'on ait :

$$\cup \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \hat{B}.$$

Comme on a évidemment $E \subseteq \cup_{x \in E} B[x, r_x] = \cup \mathcal{B}$, on peut donc écrire :

$$|E| \leq |\cup \mathcal{B}| \leq \left| \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \hat{B} \right| \leq \sum_{B \in \mathcal{B}'} |\hat{B}| = 5^n \sum_{B \in \mathcal{B}'} |B|,$$

en utilisant le fait que $\mathcal{B}'$ est au plus dénombrable et la sous-additivité de la mesure extérieure de Lebesgue. En utilisant (3), on trouve donc :

$$|E| \leq \frac{5^n}{\lambda} \sum_{B \in \mathcal{B}'} \int_B |f|.$$

Puisque les boules de $\mathcal{B}'$ sont deux à deux disjointes, il vient finalement (en utilisant l'additivité complète de l'intégrale de Lebesgue) :

$$|E| \leq \frac{5^n}{\lambda} \int_{\cup \mathcal{B}'} |f| \leq \frac{5^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

c'est-à-dire la thèse. ■

Remarque 1. — L'inégalité (1) rappelle la forme de l'inégalité de Markov, laquelle assure que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors on a pour tout $\lambda > 0$:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

Cette dernière inégalité s'obtient facilement en observant que, en posant $A_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}$ (qui est évidemment Lebesgue-mesurable), on a, sur $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \chi_{A_\lambda} \leq |f|,$$

et donc aussi, en intégrant les deux membres de l'inégalité précédente par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda |A_\lambda| = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda \chi_{A_\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

2. Le théorème de dérivation de Lebesgue

On va démontrer le résultat suivant.

Théorème 2 (Lebesgue). — Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f.$$

Afin de démontrer ce théorème, on introduit, étant donné une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, les notations suivantes :

$$\omega_f(x, r) := \int_{B[x,r]} |f(x) - f|,$$

et

$$\omega_f(x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega_f(x, r) = \lim_{\delta > 0} \sup_{0 < r \leq \delta} \int_{B[x,r]} |f(x) - f|.$$

Remarque 2. — Pour démontrer le théorème de dérivation de Lebesgue, il suffit de montrer qu'étant donné une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\omega_f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Dans ces conditions, en effet, on écrit pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ (en utilisant le fait que l'on a $\int_{B[x,r]} 1 = 1$) :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \int_{B[x,r]} f \right| &= \left| \int_{B[x,r]} f(x) dy - \int_{B[x,r]} f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B[x,r]} [f(x) - f(y)] dy \right| \leq \int_{B[x,r]} |f(x) - f(y)| dy = \omega_f(x, r). \end{aligned}$$

Il vient donc, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \left| f(x) - \int_{B[x,r]} f \right| \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega_f(x, r) = \omega_f(x).$$

Si l'on a $\omega_f(x) = 0$ pour un $x \in \mathbb{R}^n$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $0 < r \leq \delta$, on ait :

$$\left| f(x) - \int_{B[x,r]} f \right| \leq \varepsilon ;$$

autrement dit, il vient $f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f$. Pour montrer le théorème de dérivation de Lebesgue, il suffit donc bien de montrer que l'on a $\omega_f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Affirmation 1. — Étant donné une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\omega_f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Pour démontrer cette première affirmation, fixons $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse un réel $\delta > 0$ tel que l'on ait $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in B[x, \delta]$. Mais il vient alors, pour tout $0 < r \leq \delta$:

$$\omega_f(x, r) := \int_{B[x,r]} |f(x) - f(y)| dy \leq \varepsilon \int_{B[x,r]} 1 = \varepsilon.$$

En particulier, on trouve $\omega_f(x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega_f(x, r) \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il vient donc $\omega_f(x) = 0$ et l'affirmation est démontrée. ■

Affirmation 2. — Étant donné une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on a $\omega_f = \omega_{f-g}$ partout sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Remarquons pour commencer qu'il est facile de voir que l'on a $\omega_{f_1+f_2} \leq \omega_{f_1} + \omega_{f_2}$ sur $\mathbb{R}^n$ pour toute paire de fonctions localement intégrables f_1, f_2 sur $\mathbb{R}^n$. Il vient donc d'une part, sur $\mathbb{R}^n$:

$$\omega_f = \omega_{f-g+g} \leq \omega_{f-g} + \omega_g = \omega_{f-g},$$

puisque l'Affirmation 1 assure que l'on a $\omega_g = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. On calcule de même :

$$\omega_{f-g} = \omega_{f+(-g)} \leq \omega_f + \omega_{-g} = 0,$$

puisque'il suit de l'Affirmation 1 et de la continuité de $-g$ que l'on a $\omega_{-g} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. La preuve de l'affirmation est complète. ■

Affirmation 3. — Étant donné une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a, sur $\mathbb{R}^n$:

$$\omega_f \leq |f| + Mf,$$

où Mf est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f (voir la section 1).

Démonstration. — Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et observons que l'on a pour $r > 0$:

$$\begin{aligned} \omega_f(x, r) &:= \int_{B[x,r]} |f(x) - f| = \frac{1}{|B[x,r]|} \int_{B[x,r]} |f(x) - f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{|B[x,r]|} \left[\int_{B[x,r]} |f(x)| dy + \int_{B[x,r]} |f(y)| dy \right] = |f(x)| + \int_{B[x,r]} |f| \leq |f(x)| + Mf(x). \end{aligned}$$

Il vient donc aussi :

$$\omega_f(x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \omega_f(x, r) \leq |f(x)| + Mf(x),$$

c'est-à-dire la thèse puisque $x \in \mathbb{R}^n$ est arbitraire. ■

Nous sommes à présent prêts pour démontrer le théorème de dérivation de Lebesgue.

Preuve du Théorème 2. — Fixons une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Nous avons vu (voir la Remarque 2) qu'il suffit de démontrer que l'on a $\omega_f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

À cet effet, fixons $\lambda > 0$ et commençons par montrer que l'ensemble $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_f(x) > \lambda\}$, est négligeable. Pour ce faire, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons une fonction continue et intégrable $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'on ait $\int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \leq \varepsilon$. Il suit de l'Affirmation 2 que l'on a $\omega_f = \omega_{f-g}$ sur $\mathbb{R}^n$. Si $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a, en vertu de l'Affirmation 3 :

$$M(f - g)(x) + |(f - g)(x)| \geq \omega_{f-g}f(x) = \omega_f(x) > \lambda.$$

Il vient donc nécessairement soit $M(f - g)(x) > \lambda/2$, soit $|(f - g)(x)| > \lambda/2$ (sans quoi on aurait $|(f - g)(x)| + M(f - g)(x) \leq \lambda/2 + \lambda/2 = \lambda$). Autrement dit, on a :

$$E_\lambda \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}^n : |(f - g)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Il vient donc en particulier :

$$|E_\lambda| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |(f - g)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Or on a, en vertu du Lemme 1 :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : M(f - g)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2 \cdot 5^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \leq \frac{2 \cdot 5^n \varepsilon}{\lambda},$$

tandis qu'il résulte de l'inégalité de Markov (voir la Remarque 1) que l'on a :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |(f - g)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f - g| \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

Il vient donc finalement :

$$|E_\lambda| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{1 + 5^n}{\lambda}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, on trouve par conséquent $|E_\lambda| = 0$.

Écrivons à présent :

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_f(x) > 2^{-k}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2^{-k}}.$$

La sous-additivité de la mesure extérieure de Lebesgue assure dès lors que l'on a :

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \omega_f(x) > 0\}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |E_{2^{-k}}| = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a $\omega_f = 0$ hors d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$. C'est ce qu'il nous fallait démontrer. ■

La dérivation étant une opération locale, on peut démontrer une version plus forte du théorème de dérivation de Lebesgue.

Théorème 3 (Lebesgue, version forte). — Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est localement intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f.$$

Démonstration. — Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, notons $U_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$ la boule ouverte centrée en 0 et de rayon k , et posons :

$$f_k := f \chi_{U_k}.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Comme f est localement intégrable, on voit que f_k est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Il existe donc, en vertu du théorème de dérivation de Lebesgue, un ensemble négligeable $N_k \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus N_k$, on ait :

$$f_k(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f_k.$$

Si $x \in U_k \setminus N_k$ est donné, observons que cela implique (puisque l'on aura $B[x, r] \subseteq U_k$ pour $r > 0$ assez petit, et donc aussi $f_k = f$ sur $B[x, r]$ pour $r > 0$ assez petit) :

$$f(x) = f_k(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f_k = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f.$$

Posons à présent $N := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$, observons que N est négligeable et fixons $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Si $k \in \mathbb{N}$ est assez grand pour que l'on ait $x \in U_k$, il vient alors $x \in U_k \setminus N \subseteq U_k \setminus N_k$, et donc aussi, en vertu de ce qui précède :

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B[x,r]} f.$$

La version forte du théorème de dérivation de Lebesgue est donc établie. ■

Le 2 octobre 2024

- *E-mail* : Laurent.Moonens@centralesupelec.fr